Algebraische Kurven
2. Ordnung

als Lösungsmenge dieser Gleichungen:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Teil I:

Übersicht über alle möglichen Formen und Gleichungen

zunächst ohne x-y-Glied

also mit B = 0.

Text Nr. 54301

Stand 18. April 2022

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

www.mathe-cd.de

Inhalt

1 Einführung

Eine **algebraische** Gleichung 2. Grades besitzt eine **Lösungsmenge aus Zahlenpaaren**.

Die Grundmenge ist $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Wenn durch Einsetzen etwa von $(2\,|\,-1)$ eine wahre Aussage entsteht, dann hat man ein Lösungspaar gefunden. Und Achtung: Bis hierher ist noch nicht die Rede von einer Kurve oder von Punkten. Wir befinden uns auf rein algebraischem Terrain!

Die **Geometrie** kommt erst dann ins Spiel, wenn man Zahlenpaare als Punkte der x-y-Zahlenebene interpretiert, etwa in einem kartesischen Koordinatensystem. Dann wird aus der Lösungsmenge eine **Lösungskurve**. Dann entstehen Kurven mit Namen wie Ellipse, Hyperbel, Parabel usw. Es können aber auch Sonderfälle entstehen wie Kreis, Geradenpaar, Punkt und leere Menge.

Jetzt beginnen bei einigen die Verständnisschwierigkeiten: Es gibt Oberbegriffe und Namen für spezielle Kurven. Hier gehen dann die mathematische Fachspreche und die Umgangssprache oft getrennte Wege, was zu Irritationen führen kann. Dazu einige Beispiele.

a) Rein mathematisch gesehen ist ein **Kreis auch eine spezielle Ellipse**. Eine als Ellipse identifizierte Kurve kann sie als Kreis herausstellen. Daher darf man einen Kreis auch als Ellipse bezeichnen. Rein umgangssprachlich oder bei strenger Definition ist ein Kreis aber keine Ellipse, denn eine Ellipse ist ja eindeutig verformt, sie hat zwei Halbachsen, die bei einer „echten“ Ellipse (die also kein Kreis ist) verschieden groß sind. Hier betreiben wir jedoch Mathematik und betrachten Ellipse als Oberbegriff, zu dem auch Kreis gehört.

b) Ein Rechtecke kann man definieren durch vier rechte Winkel. Dann ist aber ein Quadrat auch ein Rechteck. Mathematisch gesehen ganz sicher. Umgangssprachlich wird man oft darauf beharren, dass ein Quadrat vier gleich lange Seiten hat, was ja für ein Rechteck nicht gilt. Und dann wird mancher ein Quadrat nicht als Rechteck ansehen. Mathematisch gesehen ist das falsch.

c) Die Gleichungen g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ stellen zwei parallele Geraden dar, weil sie kollinearer Richtungsvektoren haben. Untersucht man sie weiter, findet man heraus, dass der Aufpunkt $P(1\,|\,3)$ von g auch auf h liegt. Also sind g und h dieselbe Gerade. Hier ist „parallel“ der Oberbegriff, „identisch“ der Unterbegriff.
Ein Spezialfall von parallel ist also „identisch“.

d) Ganz krass ist es, wenn jemand behauptet, *eine **Gerade ist auch eine Kurve***.
Mathematisch gesehen hat er Recht, denn das Schaubild einer algebraischen Gleichung mit zwei Unbekannten nennt man eine Kurve, also auch wenn die Gleichung so aussieht:
$y = 2x + 3$, was genau genommen eine Gerade ist.

e) Unter den hier zu untersuchenden Kurven gibt es auch **Hyperbeln**, die sich vielleicht als zwei sich schneidende Geraden herausstellen. Dann ist der Graph der Gleichung formal gesehen eine Hyperbel, eine entartete Hyperbel, aber rein von den geometrischen Eigenschaften her keine echte Hyperbel.

f) Analoges kann passieren, wenn die Gleichung suggeriert, dass ich Graph eine **Parabel** ist. Und dann stellt es sich heraus, dass keine echte Parabel ist, sondern zwei parallele Geraden, die man dann als entartete Parabel bezeichnen sollte, weil sie vom Gleichungstyp dazu gehört, von den geometrischen Eigenschaften her aber keine echte Parabel sein kann.

Wir wollen in diesem Text auch solche Entartungen kennen lernen, so dass diese vielleicht seltsam anmutenden Sätze klarer werden.

Kurven 2. Grades (die man auch *Quadriken* nennt) spalte ich hier in zwei Gruppen auf.

Die erste Gruppe umfasst die Kurven in Normallage. Darunter versteht man, dass die Hauptachse (man kann auch sagen die Symmetrieachse der Kurve) parallel zur x- oder y-Achse ist. Dazu gehören nicht die Kurven in Schräglage. In Normallage haben die Kurven nämlich eine einfachere Gleichung, aus der man Kennwerte der Kurve ablesen kann. Dies untersuchen wir in diesem Text.

Die zweite Gruppe umfasst die Kurven in Schräglage. Diese haben als Merkmal ein xy-Glied in der Gleichung, wodurch man der Gleichung kaum Kenndaten entnehmen kann. Um die Kurven analysieren zu können, muss man zuerst eine Normallage herstellen.

Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) **Kurve drehen**: Man bestimmt den Winkel, um den die Kurve in die Schräglage verdreht ist. Dann dreht man entweder zurück in die Normallage oder man dreht sie weiter in die nächst mögliche Normallage. Dies untersuchen wir im Text 54302a.

(2) **Achsenkreuz drehen**, sodass die die Schräglage aufgehoben ist. Man führt dazu eine Koordinatentransformation durch. Dazu verwendet man die Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix. Dies untersuchen wir im Text 54303a.

Es gibt in der Mathe-CD spezielle Texte für die Kurven 2. Ordnung:

Ellipse für Anfänger:	23111 bis 23114
Ellipse für Studium:	54060 (Hier auch Gleichungen mit Polarkoordinaten oder Parametern)
Hyperbel für Anfänger:	20041
Hyperbel für Studium:	54070 (Hier auch Gleichungen mit Polarkoordinaten oder Parametern)
Parabeln für Anfänger:	25001
Parabel für Studium:	54080 (Hier auch Gleichungen mit Polarkoordinaten oder Parametern)

2 Die Grundtypen der Kurven 2. Grades

Die Menge aller Punktepaare $P(x\,|\,y)$, die eine Gleichung dieser Form (oder ähnlicher) lösen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

heißt **algebraische Kurve 2. Ordnung**.

In diesem Text untersuchen wird die Kurven in Normallage, also mit **B = 0**. Durch Umformungen kann man dann formtypische Kurvengleichungen herstellen, denen man den Kurventyp und weitere Merkmale ansieht. Das üben wir jetzt.

2.1 Kreise

Grundformen sind

(a) $x^2 + y^2 = r^2$ Mittelpunkt $M(0\,|\,0)$ (Ursprungskreis), Radius $r > 0$.

(b) $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ Mittelpunkt $M(x_M\,|\,y_M)$

Noch umzuformen sind Gleichungen der Form:

(c) $x^2 + y^2 - Dx - Ey + F = 0$ Wegen $A = C = 1$ kann es sich um einen Kreis handeln. Weitere Untersuchung ist notwendig:

B1: $x^2 + y^2 - 4x + 3y - \frac{11}{4} = 0$ | quadratische Ergänzung

$$\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right) + \left(y^2 + 3x + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right) = \tfrac{11}{4} + \overbrace{\boxed{\tfrac{9}{4}} + \boxed{4}} \quad |\text{ Zusammenfassen}$$

$(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 9$ Kreis um $M\left(2\,|\,-\frac{3}{2}\right)$ mit r = 3,

B2: $x^2 + y^2 - 4x + 3y + \frac{25}{4} = 0$ | quadratische Ergänzung

$$\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right) + \left(y^2 + 3x + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right) = -\tfrac{25}{4} + \boxed{\tfrac{9}{4}} + \boxed{4}$$

$(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$ „Null-Kreis“ um $M\left(2\,|\,-\frac{3}{2}\right)$ mit r = 0, entarteter Kreis = Punkt.

B3: $x^2 + y^2 - 4x + 3y + \frac{29}{4} = 0$ | quadratische Ergänzung

$$\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right) + \left(y^2 + 3x + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right) = -\tfrac{29}{4} + \boxed{\tfrac{9}{4}} + \boxed{4}$$

$(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -1$ Leere Menge!

Denn die Summe zweier Quadrate ist nie negativ!

Parameterdarstellung: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_M + r \cdot \cos(t) \\ y_M + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [0\,;\,2\pi[$.

2.2 Ellipsen

Grundformen sind:

(a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Mittelpunkt $M(0\,|\,0)$, Halbachsen a und b.

(b) $\frac{(x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$ Mittelpunkt $M(x_M\,|\,y_M)$, Halbachsen a und b.

Noch umzuformen sind Gleichungen der Form:

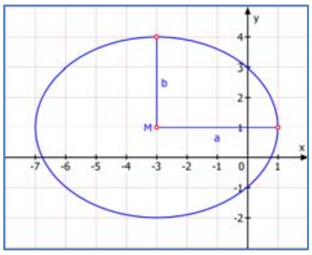
(c) $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ Wenn A und B das gleiche Vorzeichen haben, kann K eine Ellipse sein. Weitere Untersuchung notwendig:

B1: $9x^2+16y^2-54x+32y-47=0$ | Ordnen, ausklammern

$9\left(x^2-6y\right)+16\left(y^2+2y\right)=47$ | quadratische Ergänzung

$9\left(x^2-6y+\boxed{9}\right)+16\left(y^2+2y+\boxed{1}\right)=47+9\cdot\boxed{9}+16\cdot\boxed{1}$

$9(x-3)^2+16(y+1)^2=144$ | :144



$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)}{9}=\boxed{1}$ Mittelpunkt $(3\,|\,-1)$, Halbachsen a = 4 und b = 3.

B2: $9x^2+16y^2-54x+32y+97=0$ Die quadratische Ergänzung führt auf

$9(x-3)^2+16(y+1)^2=0$ K ist der Punkt $M(3\,|\,-1)$, <u>entartete Ellipse.</u>

Denn die Summe zweier Quadrate ist nur Null, wenn sie selbst Null sind, also x = 3 und y = -1.

B3: $9x^2+16y^2-54x+32y+100=0$ Die quadratische Ergänzung führt auf

$9(x-3)^2+16(y+1)^2=-3$ <u>Leere Menge</u>.

Die Summe zweier Quadrate ist nicht negativ.

Zusatz: Bei einem Kreis haben auch A und C dieselben Vorzeichen, also ist ein Kreis ein Subtyp einer Ellipse.

Parametergleichungen: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_M+a\cdot\cos(t) \\ y_M+b\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \quad t\in[0\,;2\pi\,[$

2.3 Hyperbeln.

Grundformen sind

(a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Mittelpunkt $M(0\,|\,0)$, in x-Richtung geöffnet

(b) $\frac{(x-x_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$ Mittelpunkt $M(x_M\,|\,y_M)$, in x-Richtung geöffnet

(c) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Mittelpunkt $M(0\,|\,0)$, in y-Richtung geöffnet

(d) $-\frac{(x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$ Mittelpunkt $M(x_M\,|\,y_M)$, in y-Richtung geöffnet

Beispiele:

K_1: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ Typ(a)

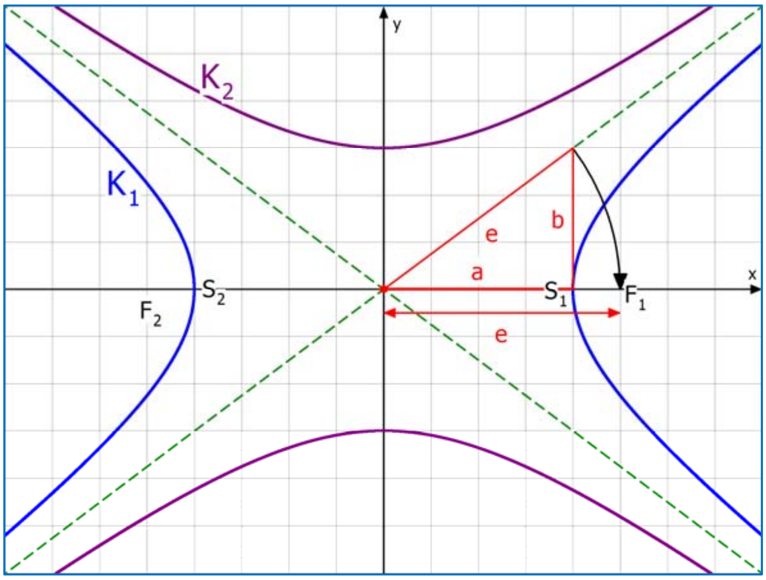
K_2: $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ Typ (c)

Ich habe die beiden Kurven von MatheGrafix durch die Parametergleichungen

K_1: $x(t)=\frac{4}{\cos(t)},\ \ y(t)=3\cdot\tan(t)$

K_2: $x(t)=4\cdot\tan(t),\ \ y(t)=\frac{3}{\cos(t)}$

erstellen lassen.



Bei $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ sind die Scheitel: $S_{1,2}(\pm 4\,|\,0)$, die Brennpunkte: $F_{1,2}(\pm e\,|\,0)$ mit $e=\sqrt{a^2+b^2}=5$.

K_3: $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ hat den Mittelpunkt $M(2\,|\,-1)$, a = 3 und b = 2, Typ (b)

K hat die Scheitel $S_1(2+3\,|\,-1)=(5\,|\,-1)$, $S_2(2-3\,|\,-1)=(-1\,|\,-1)$

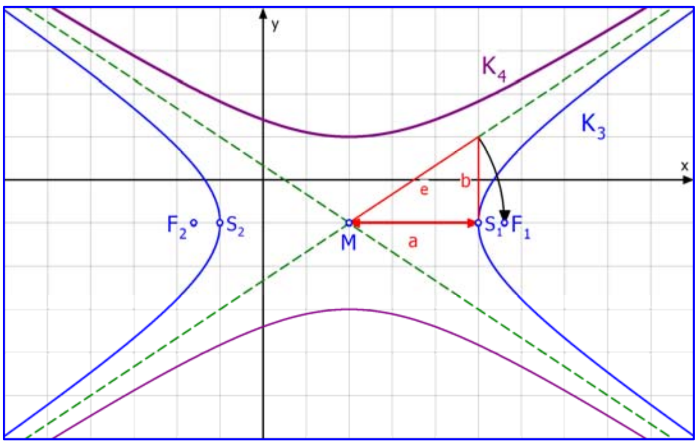
und wegen $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$ die Brennpunkte $F_{1,2}\left(2\pm\sqrt{13}\,|\,-1\right)$

Die Asymptoten haben die Gleichungen

$y+1=\frac{2}{3}(x-2)$ also $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

und $y+1=-\frac{2}{3}(x-2)$ also $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

K_4: $-\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ ist vom Typ (d)



Noch umzuformen sind Gleichungen der Form:

(e) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$ hat als Merkmal, $\text{sgn}(A) \neq \text{sgn}(C)$ (versch. Vorzeichen).

Daher könnte es ein Hyperbel sein.

Erstellen der Mittelpunktsform durch quadratische Ergänzung:

$$4\left(x^2 - 4x + \square\right) - 9\left(y^2 + 2y + \square\right) = 29 \qquad | \text{ Quadrate ergänzen}$$

$$4\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right) - 9\left(y^2 + 2y + \boxed{1}\right) = 29 + 4 \cdot \boxed{4} - 9 \cdot \boxed{1}$$

$$4 \cdot (x-2)^2 - 9 \cdot (y+1)^2 = 36 \qquad | \; :36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \qquad (*)$$

Das ist K_3 von der Seite zuvor.

(f) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 7 = 0$

Erstellen der Mittelpunktsform durch quadratische Ergänzung:

$$4\left(x^2 - 4x + \square\right) - 9\left(y^2 + 2y + \square\right) = -7 \qquad | \text{ Quadrate ergänzen}$$

$$4\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right) - 9\left(y^2 + 2y + \boxed{1}\right) = \underbrace{-7 + 4 \cdot \boxed{4} - 9 \cdot \boxed{1}}_{=0}$$

$$4 \cdot (x-2)^2 - 9 \cdot (y+1)^2 = 0 \qquad | \; :36 \quad \text{könnte man tun:}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = \boxed{0}$$

K ist ***eine entartete Hyperbel***. Es wird folgende Rechnung empfohlen:

$$\frac{(x-2)^2}{9} = \frac{(y+1)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2 = \frac{4}{9}(x-2)^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$|y+1| = \tfrac{2}{3} \cdot |x-2| \quad \Leftrightarrow \quad y+1 = \pm\tfrac{2}{3}(x-2)$$

Ersatzgleichungen: s_1: $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ und s_2: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Das Schaubild der algebraischen Gleichung ist jetzt ein sich schneidendes Geradenpaar. Vergleicht man mit (*) oben, dann erkennt man, dass s_1 und s_2 die Asymptoten der Hyperbel aus Beispiel e) sind.

g) Die Beispiele e) und f) haben die Form $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = \boxed{k}$

Wir sahen, dass für k = 0 das Geradepaar als Schaubild erscheint.

Ist $k \neq 0$, dividiert man durch k und man erhält $\frac{(x-2)^2}{9k} - \frac{(y+1)^2}{4k} = 1$

Im Falle k>0 ist die Hyperbel in x-Richtung geöffnet, im Falle k<0 in y-Richtung.

2.4 Parabeln.

In $Ax^2 + 0xy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ sind Gleichungen enthalten, die zu Parabeln in vier verschiedenen Lagen führen.

Hat die algebraische Gleichung Normallage, also **B = 0** und zusätzlich

$C = 0$ und $E \neq 0$ Dann folgt $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{A}{E}x^2 - \frac{D}{E}x - \frac{F}{E}}$

und das Schaubild <u>kann</u> eine Parabel sein, deren Achse parallel zur y-Achse ist.

$A = 0$ und $C \neq 0$ Dann folgt: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(y - y_S)^2 = k \cdot (x - x_S)}$

und das Schaubild <u>kann</u> eine Parabel sein, deren Achse parallel zur x-Achse ist.

Entartungen sind möglich. Beispiele dazu:

<u>1. Fall: Parabeln, die nach oben bzw. unten geöffnet sind</u>

sind Schaubilder der Funktionen $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$.

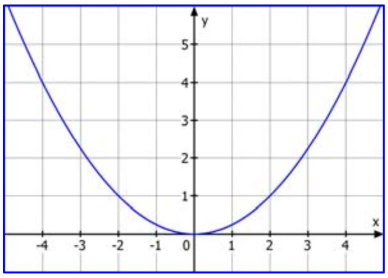
Ist a > 0, ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten.

y^2 kommt in der Gleichung nicht vor, also ist hier C = 0.

Beispiele:

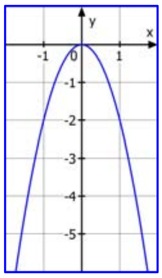
(a) $y = \frac{1}{8}x^2$ Scheitel: $S(0\,|\,0)$

nach oben geöffnet.



(b) $y = -2x^2$ Scheitel: $S(0\,|\,0)$

nach unten geöffnet.

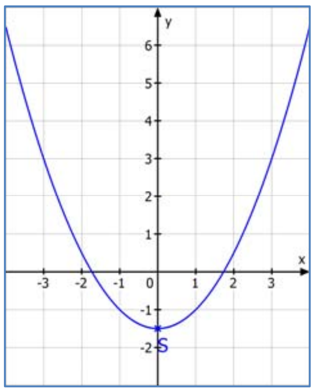


(c) $x^2 - 2y - 3 = 0$ bzw. $2y = x^2 - 3$

$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

Parabel nach oben geöffnet.

Scheitel: $S(0\,|\,-1{,}5)$



(d) $2x^2 - 4x - y + 5 = 0$

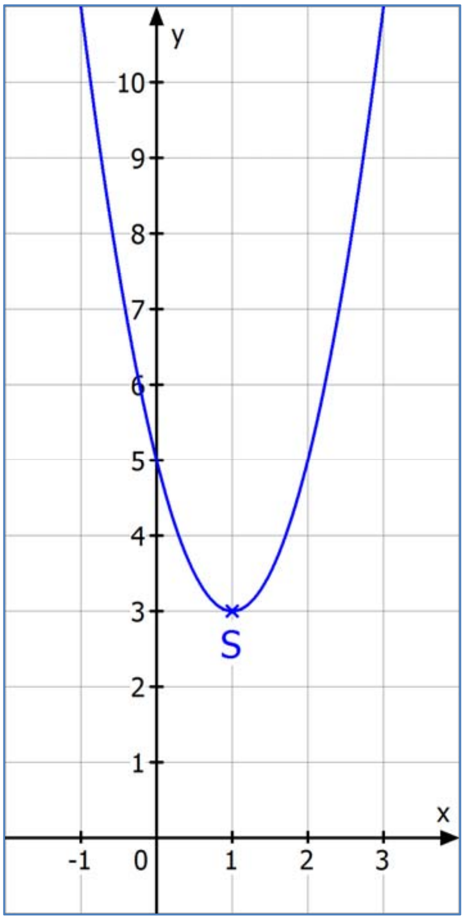
Diese Gleichung kann man durch quadratische Ergänzung in eine Scheitelform bringen, oder aber in eine Funktions-Form.

1. Variante zur Scheitelform:

$$2\left(x^2 - 2x + \square\right) = y - 5$$

$$\underbrace{2\left(x^2 - 2x + \boxed{1}\right)}_{(x-1)^2} = \underbrace{y - 5 + 2\cdot\boxed{1}}_{y-3}$$

Parabel in y-Richtung mit $S(1|3)$



2.Variante zur Scheitelform:

$$y = 2x^2 - 4x + 5$$

$$y = 2\left(x^2 - 2x + \square\right) + 5$$

$$y = \underbrace{2\left(x^2 - 2x + \boxed{1}\right)}_{(x-1)^2} + \underbrace{5 - 2\cdot\boxed{1}}_{+3}$$

3.Variante zur Funktionenform:

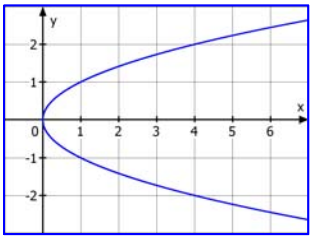
$$y = f(x) = 2x^2 - 4x + 5$$

Ableitung: $f'(x) = 4x - 4$

Scheitel: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_S = 1$

$y_S = f(1) = 2 - 4 + 5 = 3$

2. Fall: Parabeln, die nach rechts bzw. links geöffnet sind:



Dann tritt in der Gleichung y^2 auf, aber nicht x^2.

(e) $y^2-4x=0$ bzw. $y^2=4x$

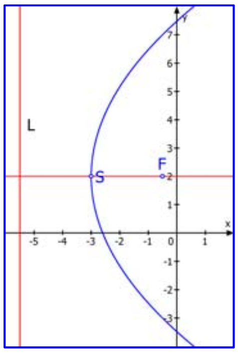
K ist eine Ursprungsparabel, die in x-Richtung geöffnet ist.

Ersatzfunktionen sind $y=\pm 2\sqrt{x}$ (Schaubilder: Halbparabeln)

(f) $y^2+4x=0$ bzw. $y^2=-4x$

Ursprungsparabel, die nach links geöffnet ist (Siegelbild von (e)).

(g) $y^2-10x-4y-26=0$



Umordnen für die Scheitelform: $(y-y_S)^2=a\cdot(x-x_S)$

Ziel: $\underbrace{\left(y^2-4y+\square\right)}_{(y-2)^2}=10x+26$

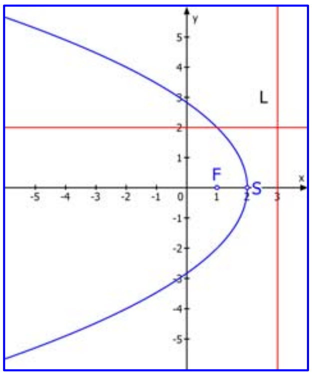
Quadrat ergänzen: $\underbrace{\left(y^2-4y+\boxed{4}\right)}_{(y-2)^2}=\underbrace{10x+26+\boxed{4}}_{10(x+3)}$

Ergebnis: $(y-2)^2=10(x+3)$

K ist eine Parabel mit dem Scheitel $S(-3\,|\,2)$, die nach rechts geöffnet ist.

Hinweis: F ist der Brennpunkt, L die Leitgerade) (Siehe Text 54080/S.5)

(h) $y^2+4x-8=0$



Umordnen: $y^2=-4x+8$

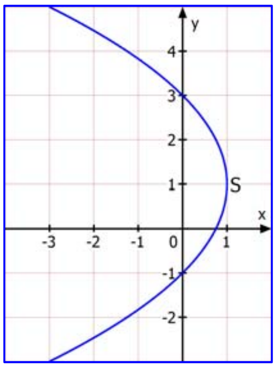
Ausklammern: $y^2=-4(x-2)$

Das ist bereits die Scheitelform.

K ist eine nach links geöffnete Parabel mit $S(2\,|\,0)$.

Parametergleichung:

(i) $(y-1)^2=-4(x-1)$ mit dem Scheitel $S(1|1)$.



Man setzt die rechte Seite gleich t^2: $t^2=-4x+4$

Daraus folgt: $x=-\frac{1}{4}t^2+1$

Einsetzen $(y-1)^2=t^2 \Rightarrow |y-1|=|t|$

Daraus: $y-1=\pm t$ bzw. $y=1+t$ oder $y=1-t$

K: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}t^2+1\\ 1+t\end{pmatrix}$

3. Fall: Entartete Parabeln

Fehlt in der algebraischen Gleichung eine Variable, dann ist die scheinbare Parabel entartet:

(j) $y^2 - 9 = 0$ bzw. $y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 3$

Das sind **zwei Parallelen zur x-Achse**. (Entartete Parabel)

(k) $y^2 + 6y + 9 = 0$ ergibt $y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3$

Das ist **eine Parallele zur x-Achse. (Entartete Parabel)**

(l) $x^2 - 4x + 3 = 0$ ergibt $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

K besteht also aus den Geraden s_1: $x = 3$ und $x = 1$.

3 Aufgaben zu Kurvenuntersuchungen

Bestimme die Art des Schaubilds (der Kurve) zu folgenden algebraischen Gleichungen.

3.1 $x^2 + y^2 + 4x - 3y - \frac{11}{4} = 0$

3.2 $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 12 = 0$

3.3 $x^2 + y^2 + 4x - 3y + \frac{25}{4} = 0$

3.4 $9x^2 + 25y^2 + 54x - 50y - 119 = 0$

3.5 $-16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y + 71 = 0$

3.6 $-16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 80 = 0$

3.7 $16x^2 + 9y^2 - 64x - 18y + 73 = 0$

3.8 a) $x^2 - y^2 - 9 = 0$, b) $x^2 - y^2 + 9 = 0$ c) $x^2 - 9y^2 = 0$

3.9 $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$

3.10 $-9x^2 + 25y^2 + 54x - 50y - 281 = 0$

3.11 $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 7 = 0$

3.12 $x^2 + 4y + 2x + 13 = 0$

3.13 $y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$

3.14 $(y - 4)^2 = 16$

3.15 $3y^2 + 4y = 0$

3.16 $y^2 + ky - 1 = 0$

Lösungen der Aufgaben

Achtung: Die Buchstaben A bis F sind Koeffizienten der allgemeinen quadratischen Form

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

3.1 $x^2 + y^2 + 4x - 3y - \frac{11}{4} = 0$

Merkmal: $A = C$ Es kann sich um einen Kreis handeln.

Neue Anordnung: $\underbrace{\left(x^2 + 4x + \square\right)}_{(x+2)^2} + \underbrace{\left(y^2 - 3y + \square\right)}_{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{11}{4}$

Ziel :

Quadratische Ergänzung: $\underbrace{\left(x^2 + 4x + \boxed{4}\right)}_{(x+2)^2} + \underbrace{\left(y^2 - 3y + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right)}_{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{11}{4} + \boxed{4} + \boxed{\tfrac{9}{4}}$

Die zunächst fehlenden Quadrate wurden auf beiden Seiten ergänzt.

Ergebnis: $(x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$

Allgemeine Kreisgleichung: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

Ergebnis: Das Schaubild ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(-2 \mid \frac{2}{2}\right)$ und dem Radius 3.

3.2 $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 12 = 0$

Merkmal: $A = C$ Es kann sich um einen Kreis handeln.

Neue Anordnung: $\underbrace{\left(x^2 + 4x + \square\right)}_{(x+2)^2} + \underbrace{\left(y^2 - 3y + \square\right)}_{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = -12$

Ziel :

Quadratische Ergänzung: $\left(x^2 + 4x + \boxed{4}\right) + \left(y^2 - 3y + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right) = -12 + \boxed{4} + \boxed{\tfrac{9}{4}}$

mit dem Ergebnis: $(x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{23}{4}$

Da die Summe zweier Quadrate nie negativ werden kann, hat diese Gleichung eine leere Lösungsmenge. K stellt also die **leere Menge** dar und keinen Kreis.

3.3 $x^2 + y^2 + 4x - 3y + \frac{25}{4} = 0$

Merkmal: $A = C$ Es kann sich um einen Kreis handeln.

Neue Anordnung: $\underbrace{\left(x^2 + 4x + \square\right)}_{(x+2)^2} + \underbrace{\left(y^2 - 3y + \square\right)}_{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = 0$

Ziel :

Quadratische Ergänzung: $\left(x^2 + 4x + \boxed{4}\right) + \left(y^2 - 3y + \boxed{\tfrac{9}{4}}\right) = -12 + \boxed{4} + \boxed{\tfrac{9}{4}}$

mit dem Ergebnis: $(x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$

Die Summe zweier Quadrate ist genau dann Null, wenn beide Quadrate Null sind.

Also folgt $x = -2$ und $y = \frac{3}{2}$ und K besteht nur aus dem **Punkt** $M\left(-2 \mid \frac{3}{2}\right)$.

3.4 $9x^2+25y^2+54x-50y-119=0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A)=\operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben dasselbe Vorzeichen.

Es kann sich daher um eine Ellipse handeln.

Neue Anordnung: $\left(9x^2+54x\right)+\left(25y^2-50y\right)=119$

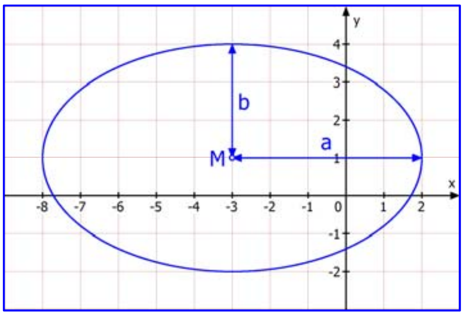
Koeffizienten ausklammern: $9\underbrace{\left(x^2+6x+\square\right)}_{(x+3)^2}+25\underbrace{\left(y^2-2y+\square\right)}_{(y-1)^2}=119$ Ziel:

Quadratische Ergänzung: $9\underbrace{\left(x^2+6x+\boxed{9}\right)}_{(x+3)^2}+25\underbrace{\left(y^2-2y+\boxed{1}\right)}_{(y-1)^2}=\underbrace{119+9\cdot\boxed{9}+25\cdot\boxed{1}}_{=225}$

1. Ergebnis: $9\cdot(x+3)^2+25\cdot(y-1)^2=225 \quad |:225$

2. Ergebnis: $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

Das ist eine Ellipse mit $M(-3\,|\,1)$
und den Halbachsen $a=5, b=3$



3.5 $-16x^2-9y^2+64x+18y+71=0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A)=\operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben dasselbe Vorzeichen.

Es kann sich daher um eine Ellipse handeln.

Mal (-1): $16x^2+9y^2-64x-18y-71=0$

Neue Anordnung: $\left(16x^2-64x\right)+\left(9y^2-18y\right)=71$

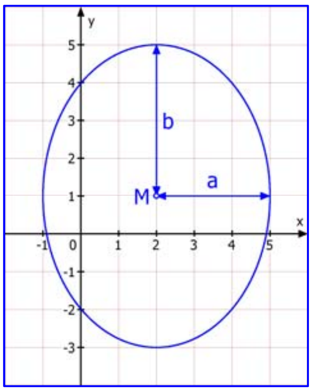
Koeffizienten ausklammern: $16\underbrace{\left(x^2-4x+\square\right)}_{(x-2)^2}+9\underbrace{\left(y^2-2y+\square\right)}_{(y-1)^2}=71$ Ziel:

Quadratische Ergänzung: $16\left(x^2-4x+\boxed{4}\right)+9\left(y^2-2y+\boxed{1}\right)=71+16\cdot\boxed{4}+9\cdot\boxed{1}$

1. Ergebnis: $16\cdot(x-2)^2+9\cdot(y-1)^2=144 \quad |:144$

2. Ergebnis: $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

Das ist eine Ellipse mit $M(2\,|\,1)$
und den Halbachsen $a=3,\quad b=4$



3.6 $-16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 80 = 0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A) = \operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben dasselbe Vorzeichen.

Es kann sich daher um eine Ellipse handeln.

Mal (-1): $16x^2 + 9y^2 - 64x - 18y + 80 = 0$

$$16\underbrace{\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right)}_{(x-2)^2} + 9\underbrace{\left(y^2 - 2y + \boxed{1}\right)}_{(y-1)^2} = \underbrace{-80 + 16 \cdot \boxed{4} + 9 \cdot \boxed{1}}_{=-7}$$

Ziel:

1. Ergebnis: $16 \cdot (x-2)^2 + 9 \cdot (y-1)^2 = -7 \quad | :7$

2. Ergebnis: $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{7}{16}} + \dfrac{(y-1)^2}{\frac{7}{9}} = -1$

Diese Gleichung stellt die **leere Menge** dar, weil die Summe zweier positiver Zahlen nie negativ sein kann. K ist also doch keine Ellipse.

3.7 $16x^2 + 9y^2 - 64x - 18y + 73 = 0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A) = \operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben dasselbe Vorzeichen.

Es kann sich daher um eine Ellipse handeln.

Quadratische Ergänzung:

$$16\underbrace{\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right)}_{(x-2)^2} + 9\underbrace{\left(y^2 - 2y + \boxed{1}\right)}_{(y-1)^2} = \underbrace{-73 + 16 \cdot \boxed{4} + 9 \cdot \boxed{1}}_{=0}$$

Ziel:

Ergebnis: $16 \cdot (x-2)^2 + 9 \cdot (y-1)^2 = 0$

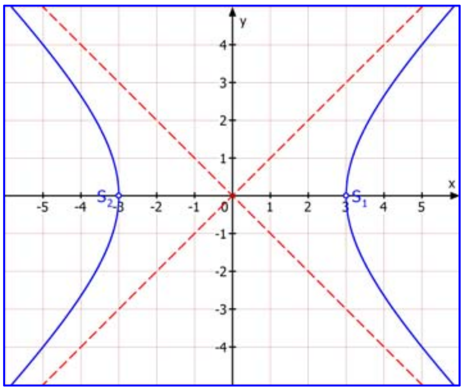
Diese Gleichung stellt nur den **Punkt** $M(2\,|\,1)$ dar.

Man kann in diesem Fall auch von einer entarteten Ellipse sprechen.

3.8 a) $x^2 - y^2 - 9 = 0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A) = -\operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben verschiedene Vorzeichen.

Es kann sich daher um eine Hyperbel handeln.



Dividieren durch 9: $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

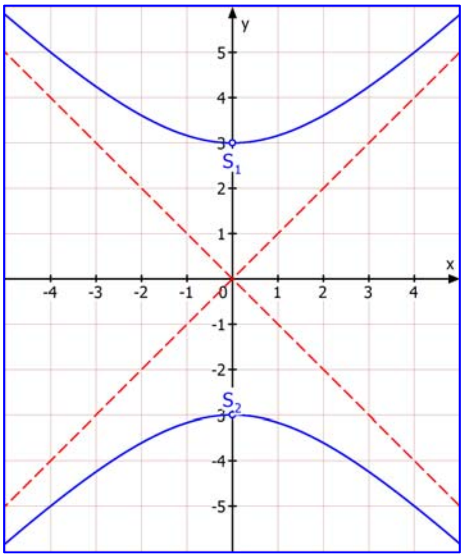
Das ist die Normalform einer Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M(0\,|\,0)$ und dem Scheitel $S(3\,|\,0)$ und den Asymptoten: $y = \pm x$.

Sie ist in x-Richtung geöffnet.

b) $x^2 - y^2 + 9 = 0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A) = -\operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben verschiedene Vorzeichen.

Es kann sich daher um eine Hyperbel handeln.

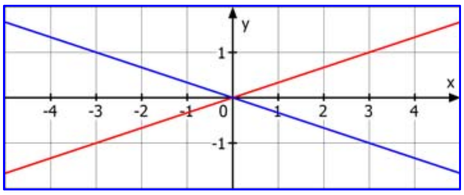


Dividieren durch 9: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = -1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $x^2 - 9y^2 = 0$

Hier könnte man auch eine Hyperbel vermuten.
Da jedoch h x und y beide fehlen, erhält man eine Entartung in Form eines Geradenpaares:

$9y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1,2} = \pm\tfrac{1}{3}x}$



3.9 $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A) = -\operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben verschiedene Vorzeichen.

Neue Anordnung: $(4x^2 - 16x)\boxed{-}(9y^2\boxed{+}18y) = 29$

Koeffizienten ausklammern: $4\underbrace{(x^2 - 4x + \square)}_{(x-2)^2} - 9\underbrace{(y^2 + 2y + \square)}_{(y+1)^2} = 29$ Ziel:

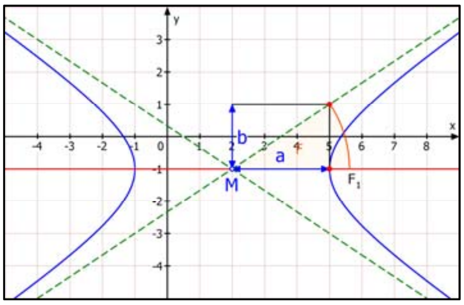
Quadratische Ergänzung: $4(x^2 - 4x + \boxed{4}) - 9(y^2 + 2y + \boxed{1}) = 29 + 4 \cdot \boxed{4} + (-9) \cdot \boxed{1}$

Alles was links ergänzt worden ist, muss auch rechts ergänzt werden:

Zusammenfassen: $4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36 \quad | :36$

$$\frac{4(x-2)^2}{36} - \frac{9(y+1)^2}{36} = 1$$

Kürzen: $$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$



Diese Gleichung stellt eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M(2\,|\,-1)$ dar, mit a = 3 und b = 2.

Ersetzt man rechts die 1 durch 0, erhält man die beiden Asymptoten.

3.10 $-9x^2 + 25y^2 + 54x - 50y - 281 = 0$

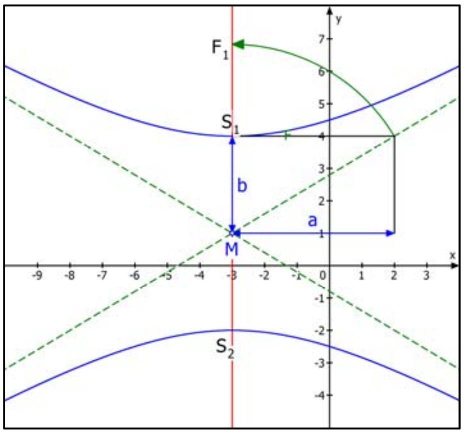
Merkmal: $\operatorname{sgn}(A) = -\operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben verschiedene Vorzeichen.

Koeffizienten ausklammern: $-9\underbrace{(x^2\boxed{-}6x + \square)}_{(x-3)^2} + 25\underbrace{(y^2 - 2y + \square)}_{(y+1)^2} = 281$ Ziel:

Quadratische Ergänzung: $-9\underbrace{(x^2\boxed{-}6x + \boxed{9})}_{(x-3)^2} + 25\underbrace{(y^2 - 2y + \boxed{1})}_{(y-1)^2} = \underbrace{281 + (-9) \cdot \boxed{9} + 25 \cdot \boxed{1}}_{z=225}$

Zusammenfassen: $-9(x+3)^2 + 25(y-1)^2 = 225 \quad | :225$

Ergebnis: $$-\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$



Diese Gleichung stellt eine in y-Richtung geöffnete Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M(-3\,|\,1)$ dar, mit a = 5 und b = 3.

Ersetzt man rechts die 1 durch 0, erhält man die beiden Asymptoten.

3.11 $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 7 = 0$

Merkmal: $\operatorname{sgn}(A) = -\operatorname{sgn}(B)$, d. h. die Koeffizienten von x^2 und y^2 haben verschiedene Vorzeichen.

Neue Anordnung: $\left(4x^2 - 16x\right)\boxed{-}\left(9y^2\boxed{+}18y\right) = -7$

Koeffizienten ausklammern: $4\underbrace{\left(x^2 - 4x + \boxed{}\right)}_{(x-2)^2} - 9\underbrace{\left(y^2 + 2y + \boxed{}\right)}_{(y+1)^2} = -7$

Ziel:

Quadratische Ergänzung: $4\underbrace{\left(x^2 - 4x + \boxed{4}\right)}_{(x-2)^2} - 9\underbrace{\left(y^2 + 2y + \boxed{1}\right)}_{(y+1)^2} = \underbrace{-7 + 4\cdot\boxed{4} + (-9)\cdot\boxed{1}}_{z=0}$

Zusammenfassen: $4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 0$

Man erhält ein Geradenpaar: $9(y+1)^2 = 4(x-2)^2$

$$(y+1)^2 = \frac{4}{9}(x-2)^2 \qquad | \ \sqrt{\ }$$

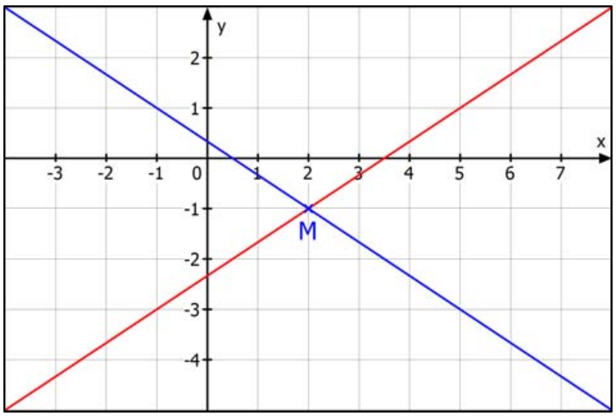
$$|y+1| = \tfrac{2}{3}|x-2|$$

Ohne Betrag: $y + 1 = \pm\tfrac{2}{3}(x-2)$

1. Gerade: $y = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{4}{3} - 1 \ \Leftrightarrow\ y = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{7}{3}$

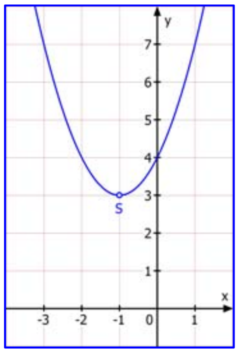
2. Gerade: $y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3} - 1 \ \Leftrightarrow\ y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}$.

Sie schneiden sich in $M(2\,|\,-1)$



3.12 $x^2 + 4y + 2x + 13 = 0$

Merkmal: Da x^2 vorhanden ist, nicht aber y^2, <u>kann</u> K eine in y-Richtung geöffnete Parabel sein.



Umformung: $4y = x^2 + 2x + 12$

Quadratische Ergänzung: $4y = \left(x^2 + 2x + \boxed{1}\right) + 13 - \boxed{1}$

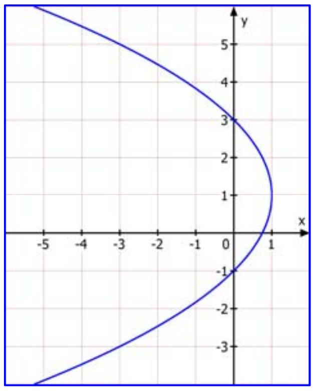
$$4y = (x+1)^2 + 12$$

$$y = (x+1)^2 + 3$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet und hat den Scheitel $S(-1\,|\,3)$

3.13 $y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$

Merkmal: Da y^2 vorhanden ist, nicht aber x^2, <u>kann</u> K eine in x-Richtung geöffnete Parabel sein.



Umformung: $y^2 - 2y = -4x + 3$

Quadratische Ergänzung: $\left(y - 2y + \boxed{1}\right) = -4x + 3 + \boxed{1}$

$$(y-1)^2 = -4x + 4$$

$$(y-1)^2 = -4(x-1)$$

Die Parabel ist nach links geöffnet und hat den Scheitel $S(1\,|\,1)$

3.14 $(y-4)^2 = 16$

Merkmal: Es ist nur eine Variable y vorhanden, dann kann ein Geradenpaar entstehen.

(als entartete Parabel): $y - 4 = \pm 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1: & y = 8 \\ s_2: & y = 0 \end{cases}$

K besteht aus zwei Parallelen zur x-Achse.

3.15 $3y^2 + 4y = 0$

Merkmal: Es ist nur eine Variable y vorhanden, dann kann ein Geradenpaar entstehen.

$y(3y+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1: & y = 0 \\ s_2: & y = -\frac{4}{3} \end{cases}$ K besteht aus zwei Parallelen zur x-Achse.

3.16 $y^2 + ky - 1 = 0$

Merkmal: Es ist nur eine Variable y vorhanden, dann kann ein Geradenpaar entstehen.

$y_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ Da $k^2+4 > 0$ ist, besteht K aus 2 Parallelen zur x-Achse.

Verallgemeinerung - Übersicht

Gegeben sei: $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$

(1) Wenn a = b kann ein **Kreis** vorliegen.

Umformung:

$$x^2 + y^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}y + \frac{e}{a} = 0$$

$$\underbrace{\left(x^2 + \frac{c}{a}x + \square\right)}_{\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2} + \underbrace{\left(y^2 + \frac{d}{a}y + \square\right)}_{\left(y+\frac{d}{2a}\right)^2} = -\frac{e}{a}$$

Ziel: $\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2$ $\left(y+\frac{d}{2a}\right)^2$

Quadratische Ergänzung:

$$\underbrace{\left(x^2 + \frac{c}{a}x + \boxed{\frac{c^2}{4a^2}}\right)}_{\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2} + \underbrace{\left(y^2 + \frac{d}{a}y + \boxed{\frac{d^2}{4a^2}}\right)}_{\left(y+\frac{d}{2a}\right)^2} = \underbrace{-\frac{e}{a} + \boxed{\frac{c^2}{4a^2}} + \boxed{\frac{d^2}{4a^2}}}_{=\frac{c^2+d^2-4ae}{4a^2}}$$

Fallunterscheidung:

Ist	$c^2 + d^2 - 4ae > 0$,	liegt ein Kreis vor.
Ist	$c^2 + d^2 - 4ae = 0$,	liegt ein Punkt vor.
Ist	$c^2 + d^2 - 4ae < 0$,	liegt die leere Menge vor.

(2) Wenn a und b gleiches Vorzeichen haben, kann eine **Ellipse** vorliegen.

Umformung:

$$\left(ax^2 + cx\right) + \left(by^2 + dy\right) = -e$$

$$\underbrace{a\left(x^2 + \frac{c}{a}x + \square\right)}_{\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2} + \underbrace{b\left(y^2 + \frac{d}{b}y + \square\right)}_{\left(y+\frac{d}{2b}\right)^2} = -e$$

Ziel: $\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2$ $\left(y+\frac{d}{2b}\right)^2$

Quadratische Ergänzung:

$$a\underbrace{\left(x^2 + \frac{c}{a}x + \boxed{\frac{c^2}{4a^2}}\right)}_{\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2} + b\underbrace{\left(y^2 + \frac{d}{b}y + \boxed{\frac{d^2}{4b^2}}\right)}_{\left(y+\frac{d}{2b}\right)^2} = \underbrace{-e + a\cdot\boxed{\frac{c^2}{4a^2}} + b\cdot\boxed{\frac{d^2}{4b^2}}}_{=z}$$

Fallunterscheidung:

Ist	$z > 0$, liegt eine Ellipse vor.	
Ist	$z = 0$, liegt ein Punkt vor.	(Entartete Ellipse)
Ist	$z < 0$, liegt die leere Menge vor.	(Entartete Ellipse)

Achtung: a und b bedeuten in dieser Rechnung nicht die Halbachsen der Ellipse.

(3) Wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben, kann eine Hyperbel vorliegen.
Dann führt man eine quadratische Ergänzung durch und kommt auf die Form:

$$a\underbrace{\left(x^2+\frac{c}{a}x+\boxed{\frac{c^2}{4a^2}}\right)}_{\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2}+b\underbrace{\left(y^2+\frac{d}{b}y+\boxed{\frac{d^2}{4b^2}}\right)}_{\left(y+\frac{d}{2b}\right)^2}=\underbrace{-e+a\cdot\boxed{\frac{c^2}{4a^2}}+b\cdot\boxed{\frac{d^2}{4b^2}}}_{=z}$$

Fallunterscheidung:

1. Ist $z \neq 0$, dann liegt eine Hyperbel vor.
Diese ist in x-Richtung geöffnet, wenn a und z dasselbe Vorzeichen haben.
Wenn nicht, ist sie in y-Richtung geöffnet.

2. Ist z = 0, erhält man ein sich schneidendes Geradenpaar, also eine entartete Hyperbel.

(4) Wenn einer der beiden Koeffizienten a oder b ungleich Null ist, *kann* eine **Parabel** vorliegen.

Ist $b \neq 0$ und a = 0, dann ist die Achse der möglichen Parabel parallel zur x-Richtung,
ist $a \neq 0$ und b = 0, dann ist die Achse der möglichen Parabel parallel zur y-Richtung.

Es liegt genau dann **keine Parabel** vor (man spricht dann auch von einer **Scheinparabel**) , wenn folgendes der Fall ist:

(a) $b \neq 0$, a = c = d = 0: Also: $by^2+e=0 \quad \Rightarrow \quad y^2=-\frac{e}{b}$

Ist $-\frac{e}{b}>0$ erhält man zwei Parallelen zur x-Achse, ist $-\frac{e}{b}=0$, die x-Achse.
ist $-\frac{e}{b}<0$ die leere Menge.

(b) $a \neq 0$, b = c = d = 0: Also: $ax^2+e=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-\frac{e}{a}$

Ist $-\frac{e}{a}>0$ erhält man zwei Parallelen zur y-Achse, ist $-\frac{e}{a}=0$, die y-Achse.
ist $-\frac{e}{a}<0$ die leere Menge.

(c) Für b = d = 0: Also: $ax^2+cx+e=0$

Das kann zu einer oder zwei Parallelen zur y-Achse führen oder zur leeren Menge.

(d) Für a = c = 0: Also: $by^2+dy+e=0$

Das kann zu einer oder zwei Parallelen zur x-Achse führen oder zur leeren Menge.